

Алгебры бинарных формул для произведений графов

От декартовых и тензорных произведений к модулярному и ко-нормальному произведению

Д.Ю. Емельянов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект № FWNF-2026-0032.

Список произведений

1	Декартово произведение $G \times H$	2	Корневое произведение $G \circ_r H$
3	Лексикографическое произведение $G \cdot H$	4	Тензорное произведение $G \times H$
5	Сильное произведение $G \boxtimes H$	6	Сумма графов $G + H$
7	Зиг-заг произведение $G \text{ zigzag } H$	8	Гомоморфное произведение $G \times_f H$
9	Произведение Кронекера $G \otimes H$	10	Модулярное произведение $G \nabla H$
11	Модулярное произведение и автоморфизмы циклов $D_m \times D_n, \quad C_m \nabla C_n$	12	Ко-нормальное / дизъюнктивное произведение $G \vee H$

Граф как структура первого порядка

Язык

Граф $X = (V, E)$ рассматривается как структура первого порядка в языке $L = \{R\}$, где $R(x, y)$ означает смежность вершин.

Теория

Каждому графу соответствует полная теория $\text{Th}(X)$. Нас интересуют формулы этой теории, которые различают пары вершин.

Примеры бинарных условий.

$$x = y, \quad R(x, y), \quad \exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)).$$

Первая формула говорит, что вершины совпадают; вторая — что они смежны; третья — что между ними есть путь длины 2.

Формулы от двух свободных переменных

Определение. Бинарной формулой называется формула первого порядка $\varphi(x, y)$ с двумя свободными переменными x и y . Остальные переменные, если они есть, связаны кванторами.

Две бинарные формулы считаются одинаковыми для графа X , если они эквивалентны в его теории:

$$\text{Th}(X) \models \forall x \forall y (\varphi(x, y) \leftrightarrow \psi(x, y)).$$

Поэтому дальше мы работаем не с синтаксической записью формулы, а с ее классом по эквивалентности в фиксированной теории графа.

От формул к меткам пар вершин

Бинарная изолирующая формула. Формула $\varphi(x, y)$ называется изолирующей, если в теории $\text{Th}(X)$ она выделяет один полный 2-тип пары вершин: всякая другая бинарная формула для такой пары уже либо следует из φ , либо несовместна с ней.

Метки

Классы изолирующих формул заменяются короткими метками $0, 1, 2, \dots$. Для циклов это часто расстояния; для общих графов — орбиты пар или локальные типы.

Композиция

Запись $i \cdot j$ означает все метки пары (a, c) , если существует вершина b , такая что (a, b) имеет метку i , а (b, c) имеет метку j .

Декартово произведение

$$G \times H$$

Определение. Декартово, или прямое, произведение $G \times H$ имеет множество вершин $V(G) \times V(H)$. Вершины (u, u') и (v, v') смежны тогда и только тогда, когда либо $u = v$ и u' смежна с v' в H , либо $u' = v'$ и u смежна с v в G .

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 2

Декартово произведение ребра и ребра



ребро

ребро

$$K_2 \times K_2$$

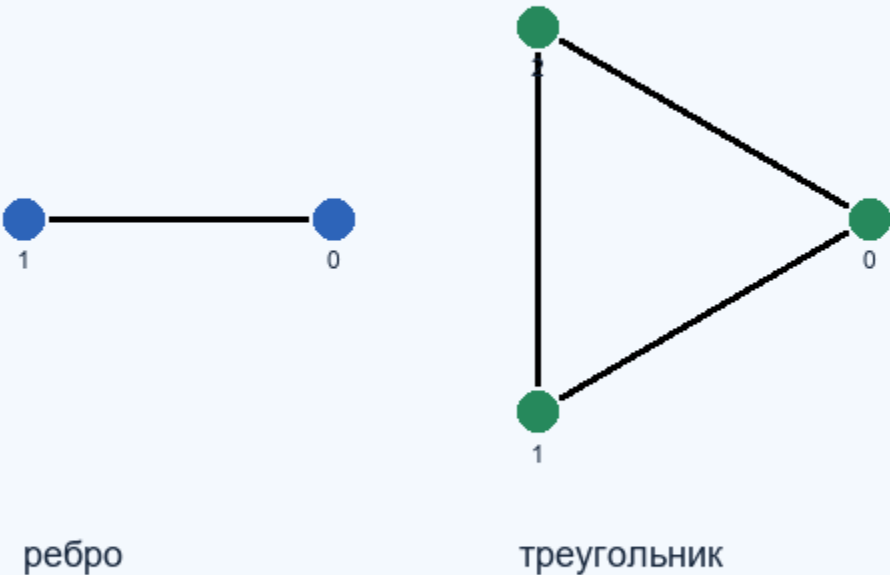
Таблица Кэли для $K_2 \times K_2$: квадрат, метки 0, 1, 2

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 2}	{1}
2	{2}	{1}	{0, 2}

Ребро на треугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, результат = 2

Декартово произведение ребра и треугольника



$$K_2 \times K_3$$

Таблица Кэли для $K_2 \times K_3$: результат диаметра 2

.	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

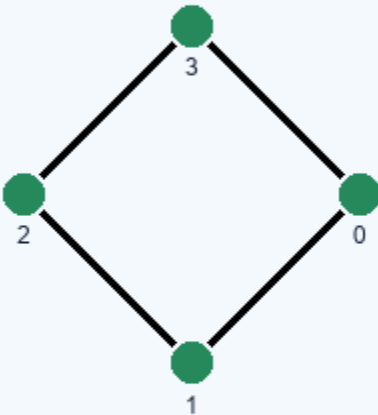
Ребро на четырехугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $C_4 = 2$, результат = 3

Декартово произведение ребра и четырехугольника



ребро



четырехугольник

$$K_2 \times C_4$$

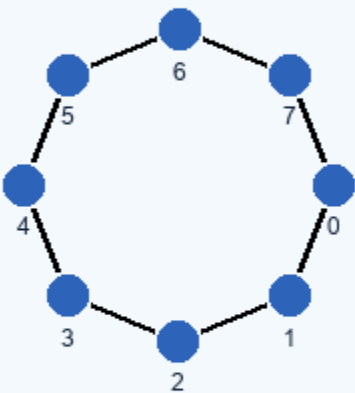
Таблица Кэли для $K_2 \times C_4$: ребро на четырехугольник

·	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2}	{1, 3}
3	{3}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}

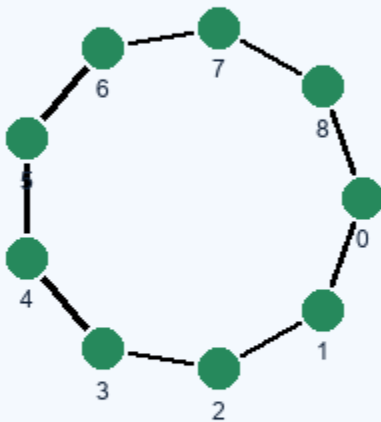
Цикл длины 8 на цикл длины 9

Диаметры: $C_8 = 4$, $C_9 = 4$, результат = 8

Декартово произведение цикла длины 8 и цикла длины 9



цикл длины 8



цикл длины 9

$$C_8 \times C_9$$

Общая таблица Кэли алгебры $\mathfrak{Q}_n$

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\dots$	m	l
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{\dots\}$	$\{m\}$	$\{l\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{\dots\}$	$\{Nc(2m)\}$	$\{C(2l)\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{\dots\}$	$\{C(2m)\}$	$\{Nc(2l)\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2,4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{Nc(2m)\}$	$\{\dots\}$	$\{Nc(2m)\}$	$\{C(2l)\}$
4	$\{4\}$	$\{1,3,5\}$	$\{0,2,4,6\}$	$\{Nc(2m)\}$	$\{C(2m)\}$	$\{\dots\}$	$\{C(2m)\}$	$\{Nc(2l)\}$
$\dots$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{\dots\}$	$\{Nc(2m)\}$	$\{C(2l)\}$
m	$\{m\}$	$\{Nc(2m)\}$	$\{C(2m)\}$	$\{Nc(2m)\}$	$\{C(2m)\}$	$\{Nc(2m)\}$	$\{C(2m)\}$	$\{Nc(2l)\}$
l	$\{l\}$	$\{C(2l)\}$	$\{Nc(2l)\}$	$\{C(2l)\}$	$\{Nc(2l)\}$	$\{C(2l)\}$	$\{Nc(2l)\}$	$\{C(2l)\}$

m — четная метка, l — нечетная метка; $C(x)$ — четные метки до x , $Nc(x)$ — нечетные метки до x .

Декартово произведение

$$G \times H$$

Алгебра: $\mathfrak{P}_n$ строится из $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{K}$

Утверждение 2.18. Алгебра, получаемая из n умножений алгебры $\mathfrak{P}_1$ на $\mathfrak{K}$, будет эквивалентна алгебре $\mathfrak{P}_n$.

Пояснение. Определение 2.17 перед этим строит алгебру $\mathfrak{P}_n$ для n умножений алгебры $\mathfrak{P}_1$ на $\mathfrak{K}$ и задает ее таблицей Кэли.

Корневое произведение

$$G \circ_r H$$

Определение. Корневое произведение $G \circ H$ графа G и корневого графа H : берутся $|V(G)|$ непересекающихся копий H , и для каждой вершины v_i графа G вершина v_i отождествляется с корнем i -й копии H .

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 3

Корневое произведение ребра и ребра



ребро



ребро

$$K_2 \circ_r K_2$$

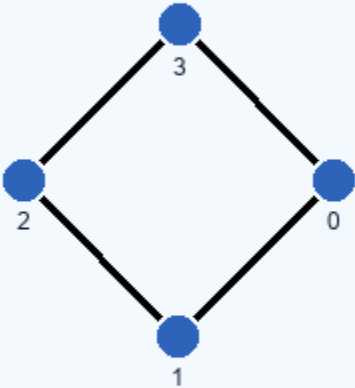
Таблица Кэли для H^2 : корневое произведение ребра

·	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2}	{1, 3}
3	{3}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}

Четырехугольник на ребро

Диаметры: $C_4 = 2$, $K_2 = 1$, результат = 4

Корневое произведение четырехугольника и ребра



четырехугольник



ребро

$$C_4 \circ_r K_2$$

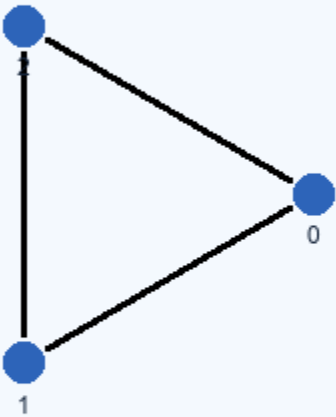
Таблица Кэли для $C_4 \circ H$: квадрат на ребро

·	0	1	2	3	4
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2, 4}	{1, 3}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2, 4}	{1, 3}	{0, 2, 4}
3	{3}	{0, 2, 4}	{1, 3}	{0, 2, 4}	{1, 3}
4	{4}	{1, 3}	{0, 2, 4}	{1, 3}	{0, 2, 4}

Треугольник на ребро

Диаметры: $K_3 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 3

Корневое произведение треугольника и ребра



треугольник



ребро

$$K_3 \circ_r K_2$$

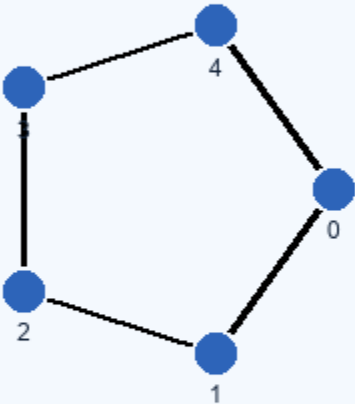
Таблица Кэли для $K_3 \circ H$: треугольник на ребро

·	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2, 3}	{0, 1, 2, 3}
2	{2}	{0, 1, 2, 3}	{0, 1, 2, 3}	{0, 1, 2, 3}
3	{3}	{0, 1, 2, 3}	{0, 1, 2, 3}	{0, 1, 2, 3}

Цикл длины 5 на ребро

Диаметры: $C_5 = 2$, $K_2 = 1$, результат = 4

Корневое произведение цикла длины 5 и ребра



цикл длины 5



ребро

$$C_5 \circ_r K_2$$

Таблица Кэли для $C_5 \circ H$: пятиугольник на ребро

·	0	1	2	3	4
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3, 2}	{0, 1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2, 3, 4}
2	{2}	{1, 3, 2}	{0, 1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2, 3, 4}
3	{3}	{0, 1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2, 3, 4}
4	{4}	{0, 1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2, 3, 4}	{0, 1, 2, 3, 4}

Общая таблица Кэли алгебры $\mathfrak{H}^k$

.	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	...	Foe(n+1)
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	Foe(n+2)
3	{3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	Odd(n)	...	Foe(n+3)
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	Odd(n)	Ev(n)	...	Foe(n+4)
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	Foe(n+1)	Foe(n+2)	Foe(n+3)	Foe(n+4)	...	Ev(n)

$Ev(n)$ — четные числа до n , $Odd(n)$ — нечетные числа до n ; $Foe(k) = Ev(n)$ при четном k , иначе $Odd(n)$.

Общая таблица Кэли алгебры $\mathcal{A}_n^k$

.	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	...	Fr(n+1)
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,1,2,3,4,5,6}	...	Fr(n+1)
3	{3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,1,2,3,4,5,6}	{1,2,3,4,5,6}	...	Fr(n+1)
4	{4}	{1,3,5}	{0,1,2,3,4,5,6}	{1,2,3,4,5,6}	{0,1,2,3,4,5,6}	...	Fr(n+1)
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	Fr(n+1)	Fr(n+1)	Fr(n+1)	Fr(n+1)	...	{0,1,2,3,4,...,n}

$Fr(k) = \{0, 1, \dots, k\}$ при четном k ; при нечетном k : если $k \geq m$, то $\{0, 1, \dots, k\}$, если $k < m$

Корневое произведение

$$G \circ_r H$$

Алгебра: $\mathfrak{H}^{\mathfrak{k}}$ или $\mathfrak{A}\mathfrak{H}^{\mathfrak{k}}$

Теорема. Если T - теория корневого произведения графов на ребро, $\mathfrak{B}$ - алгебра бинарных изолирующих формул теории T , то алгебра $\mathfrak{B}$ задается ровно одной из следующих алгебр: $\mathfrak{H}^{\mathfrak{k}}$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{H}^{\mathfrak{k}}$.

Пояснение. Классификация разделяет корневые произведения на две серии алгебр: $\mathfrak{H}^{\mathfrak{k}}$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{H}^{\mathfrak{k}}$.

Лексикографическое произведение

$$G \cdot H$$

Определение. Лексикографическое произведение $G \cdot H$ имеет множество вершин $V(G) \times V(H)$. Вершины (u, v) и (x, y) смежны тогда и только тогда, когда либо u смежна с x в G , либо $u = x$ и v смежна с y в H .

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 1

Лексикографическое произведение ребра и ребра



ребро

ребро

$$K_2 \cdot K_2$$

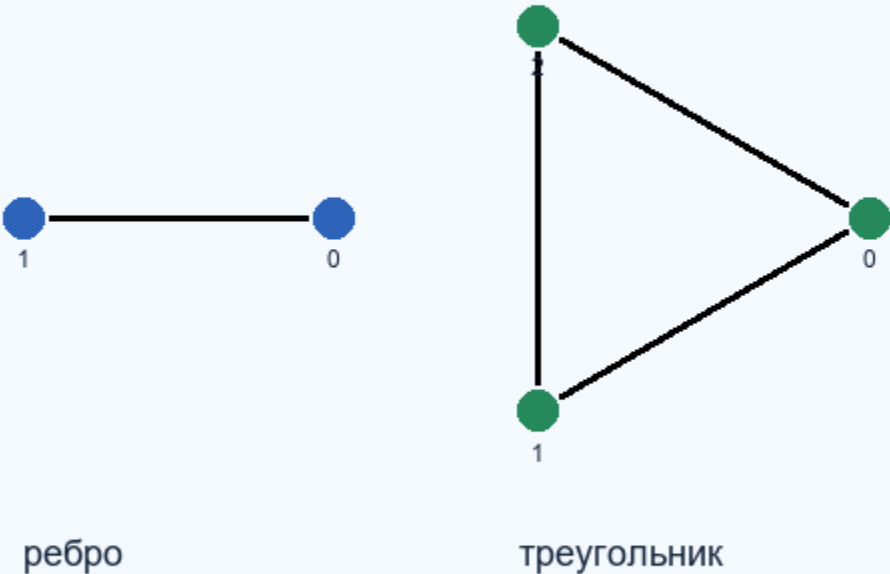
Таблица Кэли для $K_2 \cdot K_2$: результат диаметра 1

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0, 1}

Ребро на треугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, результат = 1

Лексикографическое произведение ребра и треугольника



$$K_2 \cdot K_3$$

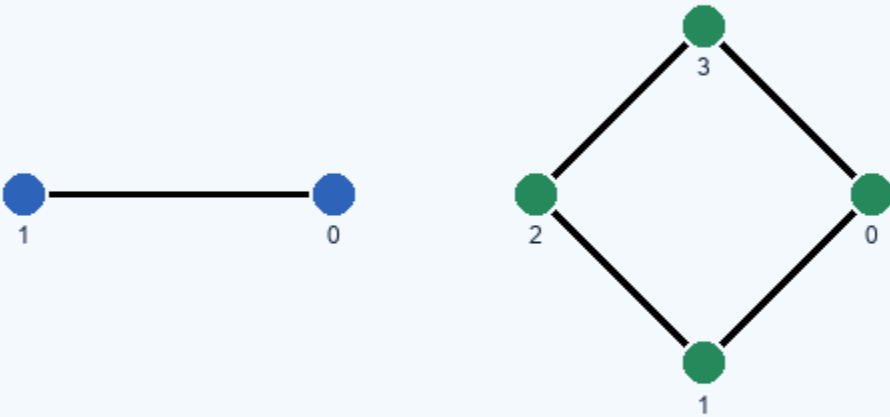
Таблица Кэли для $K_2 \cdot K_3$: результат диаметра 1

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0, 1}

Ребро на четырехугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $C_4 = 2$, результат = 2

Лексикографическое произведение ребра и четырехугольника



ребро

четырёхугольник

$$K_2 \cdot C_4$$

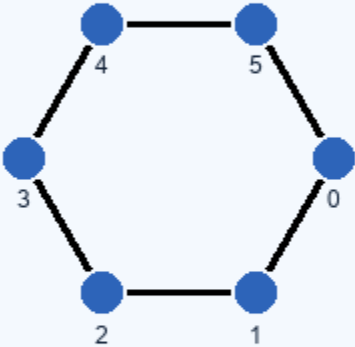
Таблица Кэли для $K_2 \cdot C_4$: результат диаметра 2

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

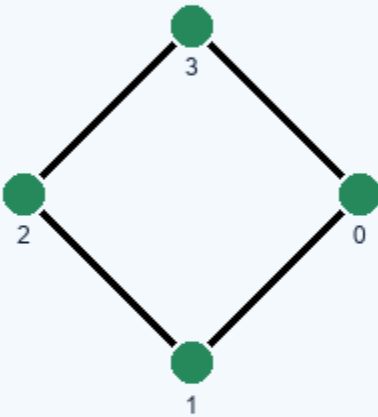
Цикл длины 6 на четырехугольник

Диаметры: $C_6 = 3$, $C_4 = 2$, результат = 3

Лексикографическое произведение цикла длины 6 и четырехугольника



цикл длины 6



четырёхугольник

$$C_6 \cdot C_4$$

Таблица Кэли алгебры $\mathcal{L}_n$

.	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,1,2}	{0,1,2,3}	{0,1,2,3,4}	{0,1,2,3,4,5}	...	{0,1,2,3,...,n}
2	{2}	{0,1,2,3}	{0,1,2,3,4}	{0,1,2,3,4,5}	{0,1,2,3,4,5,6}	...	{0,1,2,3,...,n}
3	{3}	{0,1,2,3,4}	{0,1,2,3,4,5}	{0,1,2,3,4,5,6}	{0,1,2,3,4,5,6,7}	...	{0,1,2,3,...,n}
4	{4}	{0,1,2,3,4,5}	{0,1,2,3,4,5,6}	{0,1,2,3,4,5,6,7}	{0,1,2,3,4,5,6,7,8}	...	{0,1,2,3,...,n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{0,1,2,3,...,n}	{0,1,2,3,...,n}	{0,1,2,3,...,n}	{0,1,2,3,...,n}	...	{0,1,2,3,...,n}

Лексикографическое произведение

$$G \cdot H$$

Алгебра: $\mathcal{L}_n$; при симплексном поглощении — алгебры симплексов $\mathfrak{S}_d$

Теорема. Алгебра $\mathcal{L}_n$ для лексикографического произведения графов диаметра n задается таблицей Кэли; в симплексных случаях эти алгебры поглощаются алгебрами симплексов.

Пояснение. Таблица $\mathcal{L}_n$ показывает, как при композиции меток возникают начальные интервалы меток.

Тензорное произведение

$$G \times H$$

Определение. Тензорное произведение $G \times H$ имеет множество вершин $V(G) \times V(H)$. Различные вершины (u, u') и (v, v') смежны тогда, когда u смежна с v и u' смежна с v' .

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат несвязен, $\max \text{diam}$ компоненты = 1

Тензорное произведение ребра и ребра



ребро

ребро

$$K_2 \times K_2$$

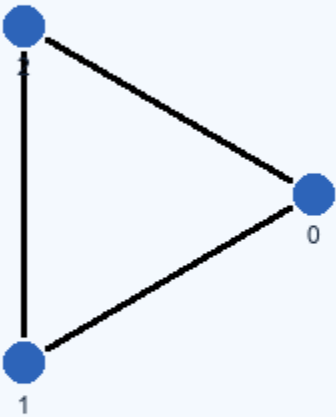
Таблица Кэли для $K_2 \times K_2$: две копии ребра

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0}

Треугольник на ребро

Диаметры: $K_3 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 3

Тензорное произведение треугольника и ребра



треугольник



ребро

$$K_3 \times K_2$$

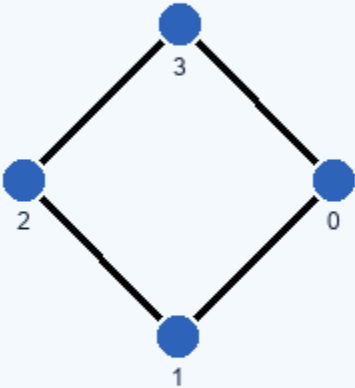
Таблица Кэли для $K_3 \times K_2$: треугольник на ребро

·	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2}	{1, 3}
3	{3}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}

Четырехугольник на ребро

Диаметры: $C_4 = 2$, $K_2 = 1$, результат несвязен, $\max \text{diam}$ компоненты = 2

Тензорное произведение четырехугольника и ребра



четырехугольник



ребро

$$C_4 \times K_2$$

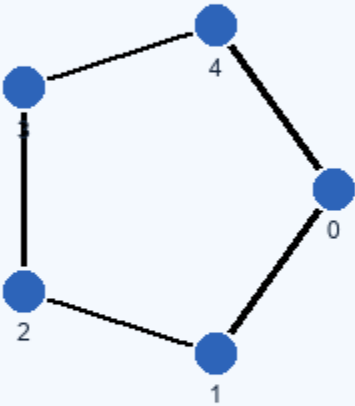
Таблица Кэли для $C_4 \times K_2$: квадрат на ребро

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 2}	{1}
2	{2}	{1}	{0, 2}

Цикл длины 5 на ребро

Диаметры: $C_5 = 2$, $K_2 = 1$, результат = 5

Тензорное произведение цикла длины 5 и ребра



цикл длины 5



ребро

$$C_5 \times K_2$$

Таблица Кэли для $C_5 \times K_2$: пятиугольник на ребро

.	0	1	2	3	4	5
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2, 4}	{1, 3, 5}	{0, 2, 4}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2, 4}	{1, 3, 5}	{0, 2, 4}	{1, 3, 5}
3	{3}	{0, 2, 4}	{1, 3, 5}	{0, 2, 4}	{1, 3, 5}	{0, 2, 4}
4	{4}	{1, 3, 5}	{0, 2, 4}	{1, 3, 5}	{0, 2, 4}	{1, 3, 5}
5	{5}	{0, 2, 4}	{1, 3, 5}	{0, 2, 4}	{1, 3, 5}	{0, 2, 4}

Таблица Кэли алгебры $\mathbb{Z}_p$

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{1,3,5, ...,n-1}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{0,2,4, ...,n}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ...,n-1}	...	{1,3,5, ...,n-1}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	...	{0,2,4, ...,n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	...	{0,2,4, ...,n}

Таблица Кэли алгебры $\mathfrak{S}_n$

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{0,2,4,...,n}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{1,3,5,...,n-1}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	...	{1,3,5,...,n-1}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}

Тензорное произведение

$$G \times H$$

Алгебра: $\mathcal{I}p_e$ или $\mathcal{I}p_o$

Теорема. Если T - теория тензорного произведения графа на ребро, $\mathcal{B}$ - алгебра бинарных изолирующих формул теории T , то алгебра $\mathcal{B}$ задается ровно одной из следующих алгебр: $\mathcal{I}p_e$, $\mathcal{I}p_o$.

Пояснение. Индексы e и o соответствуют четной и нечетной сериям таблиц для произведений многоугольников на ребро.

Сильное произведение

$$G \boxtimes H$$

Определение. Сильное произведение $G \boxtimes H$ имеет множество вершин $V(G) \times V(H)$. Различные вершины (u, u') и (v, v') смежны тогда и только тогда, когда $u = v$ и u' смежна с v' , либо $u' = v'$ и u смежна с v , либо смежность выполняется в обеих координатах.

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 1

Сильное произведение ребра и ребра



ребро



ребро

$$K_2 \boxtimes K_2$$

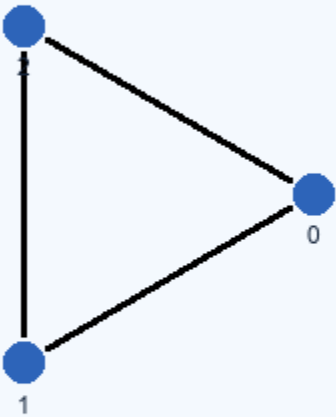
Таблица Кэли для $K_2 \boxtimes K_2: \mathfrak{T}_1$

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0, 1}

Треугольник на ребро

Диаметры: $K_3 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 1

Сильное произведение треугольника и ребра



треугольник



ребро

$$K_3 \boxtimes K_2$$

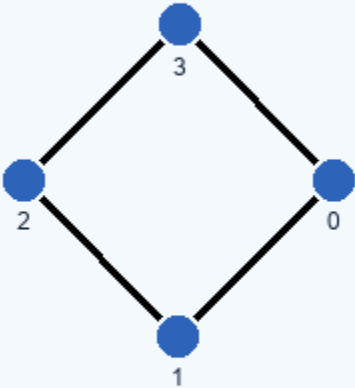
Таблица Кэли для $K_3 \boxtimes K_2: \mathfrak{T}_1$

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0, 1}

Четырехугольник на ребро

Диаметры: $C_4 = 2$, $K_2 = 1$, результат = 2

Сильное произведение четырехугольника и ребра



четырехугольник



ребро

$C_4 \boxtimes K_2$

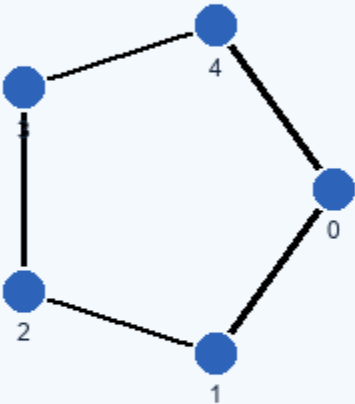
Таблица Кэли для $C_4 \boxtimes K_2$: квадрат на ребро

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
2	$\{2\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$

Цикл длины 5 на ребро

Диаметры: $C_5 = 2$, $K_2 = 1$, результат = 2

Сильное произведение цикла длины 5 и ребра



цикл длины 5



ребро

$$C_5 \boxtimes K_2$$

Таблица Кэли для $C_5 \boxtimes K_2$: пятиугольник на ребро

$\cdot$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
2	$\{2\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$

Таблица Кэли алгебры симплексов $\mathfrak{I}_n$

.	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,1,2}	{0,1,2,3}	{0,1,2,3,4,...,n}	{0,1,2,3,4,...,n}	...	{0,1,2,...,n}
2	{2}	{0,1,2,3}	{0,1,2,3,4}	{0,1,2,3,4,...,n}	{0,1,2,3,4,...,n}	...	{0,1,2,...,n}
3	{3}	{0,1,2,3,4}	{0,1,2,3,4,...,n}	{0,1,2,3,4,...,n}	{0,1,2,3,4,...,n}	...	{0,1,2,...,n}
4	{4}	{0,1,2,3,4,...,n}	{0,1,2,3,4,...,n}	{0,1,2,3,4,...,n}	{0,1,2,3,4,...,n}	...	{0,1,2,...,n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{0,1,2,...,n}	{0,1,2,...,n}	{0,1,2,...,n}	{0,1,2,...,n}	...	{0,1,2,...,n}

Сильное произведение

$$G \boxtimes H$$

Алгебра: алгебры симплексов $\mathfrak{S}_d$

Теорема. Если сильное умножение алгебр бинарных изоляторов для n -угольников приводит хотя бы к одному симплексу, то алгебра результата изоморфна алгебре симплексов $\mathfrak{S}_d$.

Пояснение. Поэтому в сильных произведениях малых графов таблицы быстро сводятся к симплексным алгебрам соответствующего диаметра.

Сумма графов

$$G + H$$

Определение. Если $V(G_1)$ и $V(G_2)$ не пересекаются, то суммой $G_1 + G_2$ называется граф, полученный из их объединения добавлением ребер, соединяющих каждую вершину G_1 с каждой вершиной G_2 .

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 1

Сумма ребра и ребра



ребро



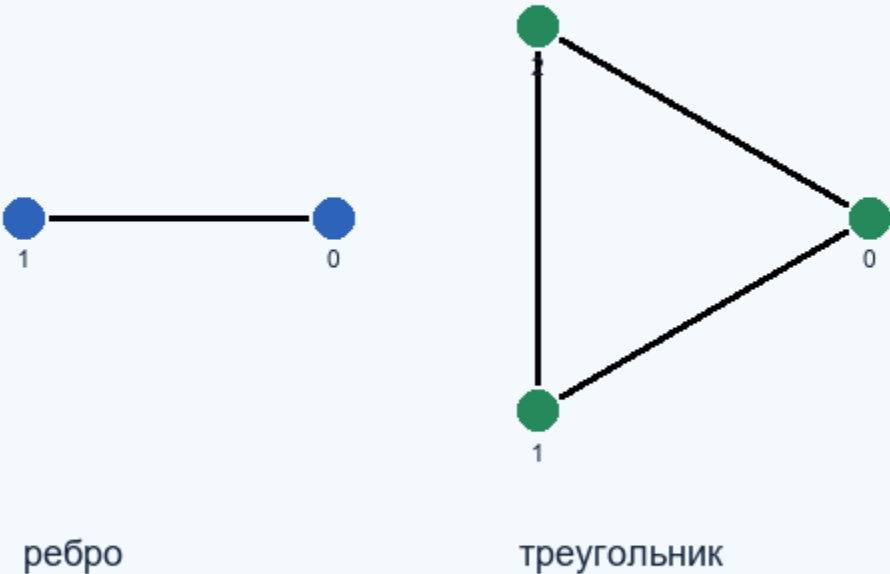
ребро

$K_2 + K_2$

Ребро на треугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, результат = 1

Сумма ребра и треугольника

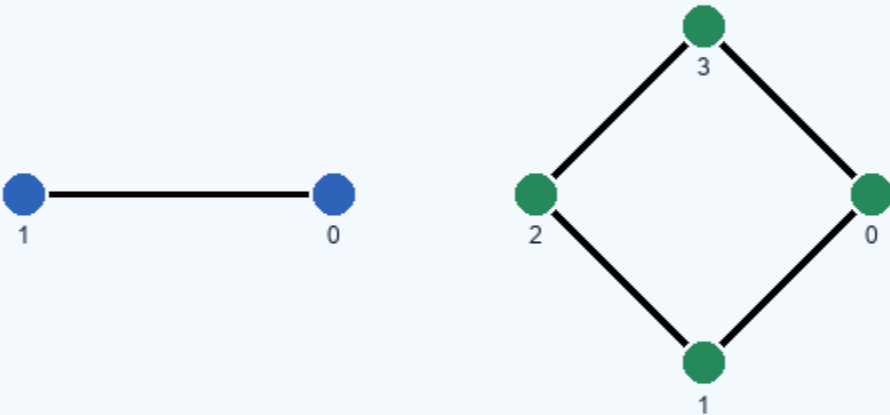


$$K_2 + K_3$$

Ребро на четырехугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $C_4 = 2$, результат = 2

Сумма ребра и четырехугольника



ребро

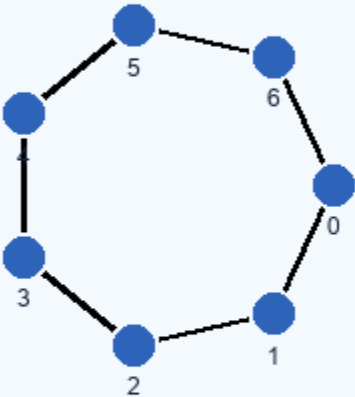
четырёхугольник

$$K_2 + C_4$$

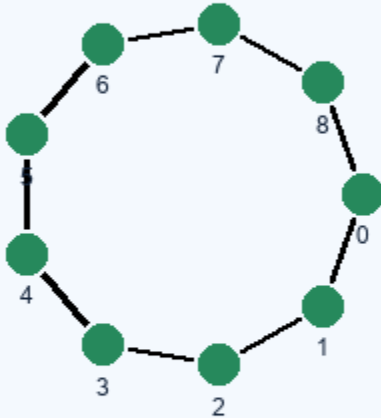
Цикл длины 7 на цикл длины 9

Диаметры: $C_7 = 3$, $C_9 = 4$, результат = 2

Сумма цикла длины 7 и цикла длины 9



цикл длины 7



цикл длины 9

$$C_7 + C_9$$

Таблица Кэли симплексного случая диаметра 2

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

Сумма графов

$$G + H$$

Алгебра: $\mathfrak{S}$

Теорема. Если T - теория суммы связных графов, $\mathfrak{B}$ - алгебра бинарных изолирующих формул теории T , то алгебра $\mathfrak{B}$ задается ровно одной алгеброй $\mathfrak{S}$.

Пояснение. Добавление всех ребер между компонентами приводит к диаметру 2 и к появлению симплексного поведения.

Зиг-заг произведение

$$G \text{ zigzag } H$$

Определение. Зигзаг-произведение G и H заменяет каждую вершину графа G копией, то есть облаком, графа H , и соединяет вершины малым шагом внутри облака, большим шагом между облаками и еще одним малым шагом внутри конечного облака.

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 2

Зиг-заг произведение ребра и ребра



ребро



ребро

$K_2 \text{ zigzag } K_2$

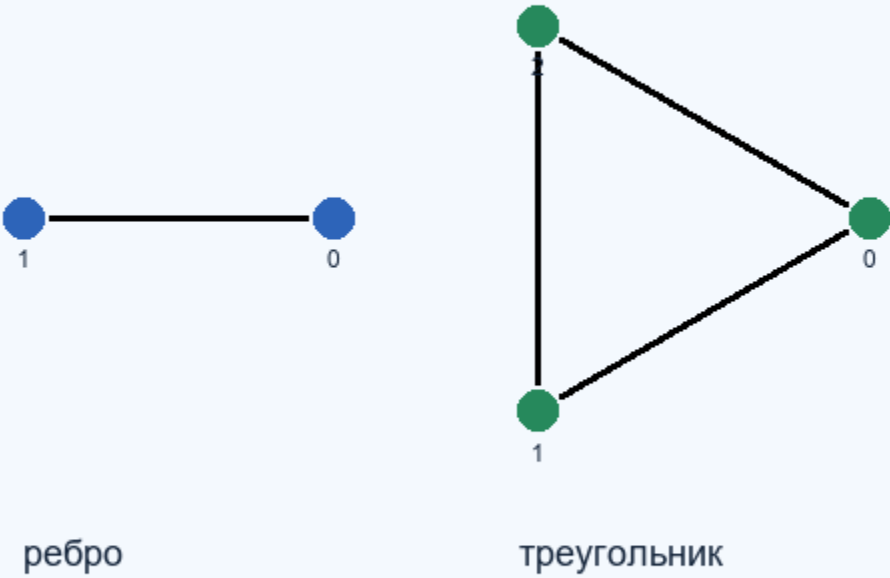
Таблица Кэли для K_2 zigzag K_2 : результат диаметра 2

.	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 2}	{1}
2	{2}	{1}	{0, 2}

Ребро на треугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, результат = 2

Зиг-заг произведение ребра и треугольника



$K_2 \text{ zigzag } K_3$

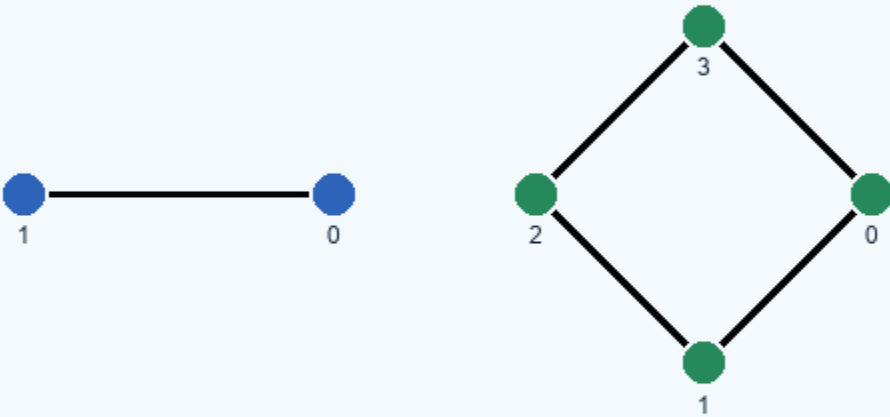
Таблица Кэли для K_2 zigzag K_3 : результат диаметра 2

.	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

Ребро на четырехугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $C_4 = 2$, результат = 3

Зиг-заг произведение ребра и четырехугольника



ребро

четырехугольник

$K_2 \text{ zigzag } C_4$

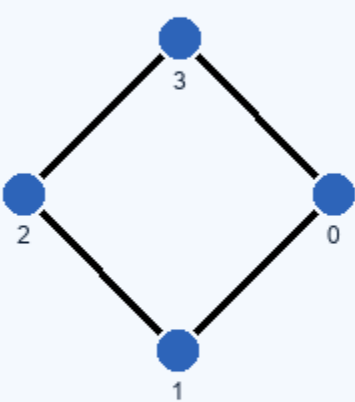
Таблица Кэли для K_2 zigzag C_4 : результат диаметра 3

·	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2}	{1, 3}
3	{3}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}

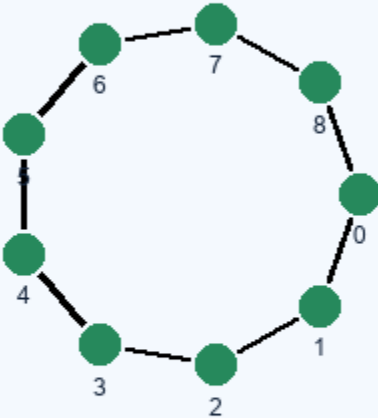
Четырехугольник на цикл длины 9

Диаметры: $C_4 = 2$, $C_9 = 4$, результат = 6

Зиг-заг произведение четырехугольника и цикла длины 9



четырёхугольник



цикл длины 9

$C_4 \text{ zigzag } C_9$

Общая таблица Кэли алгебры $\mathbb{Z}ig_n$

$\cdot$	0	1	2	3	4	$\dots$	m	l
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{...}	{m}	{l}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{...}	{Nc(m+1)}	{C(l+1)}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{...}	{C(m+2)}	{Nc(l+2)}
3	{3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{Nc(7)}	{...}	{Nc(m+3)}	{C(l+3)}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{Nc(7)}	{C(8)}	{...}	{C(m+4)}	{Nc(l+4)}
$\dots$	{...}	{...}	{...}	{...}	{...}	{...}	{...}	{...}
m	{m}	{Nc(m+1)}	{C(m+2)}	{Nc(m+3)}	{C(m+4)}	{...}	{C(2m)}	{Nc(m+l)}
l	{l}	{C(l+1)}	{Nc(l+2)}	{C(l+3)}	{Nc(l+4)}	{...}	{Nc(m+l)}	{C(2l)}

m — четная метка, l — нечетная метка; $C(x)$ — четные метки до x , $Nc(x)$ — нечетные метки до x .

Зиг-заг произведение

$$G \operatorname{zigzag} H$$

Алгебра: $\mathcal{Zig}$

Теорема. Если T - теория зигзаг-произведения правильного многогранника на ребро, $\mathcal{B}$ - алгебра бинарных изолирующих формул теории T , то алгебра $\mathcal{B}$ задается алгеброй $\mathcal{Zig}$.

Пояснение. Трехшаговое правило *zig-zag-zig* дает единую таблицу для рассматриваемого класса произведений.

Гомоморфное произведение

$$G \times_f H$$

Определение. Для графов $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ и гомоморфизма $f : V_1 \rightarrow V_2$ гомоморфное произведение имеет вершины (v, u) , где $v \in V_1$, $u \in V_2$. Ребра задаются объединением двух типов: ребра, пришедшие из E_1 при условии $f(v_1) = f(v_2)$, и ребра внутри слоя, задаваемые образом $f(v)$.

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат = 2

Гомоморфное произведение ребра и ребра



ребро

ребро

$$K_2 \times_f K_2$$

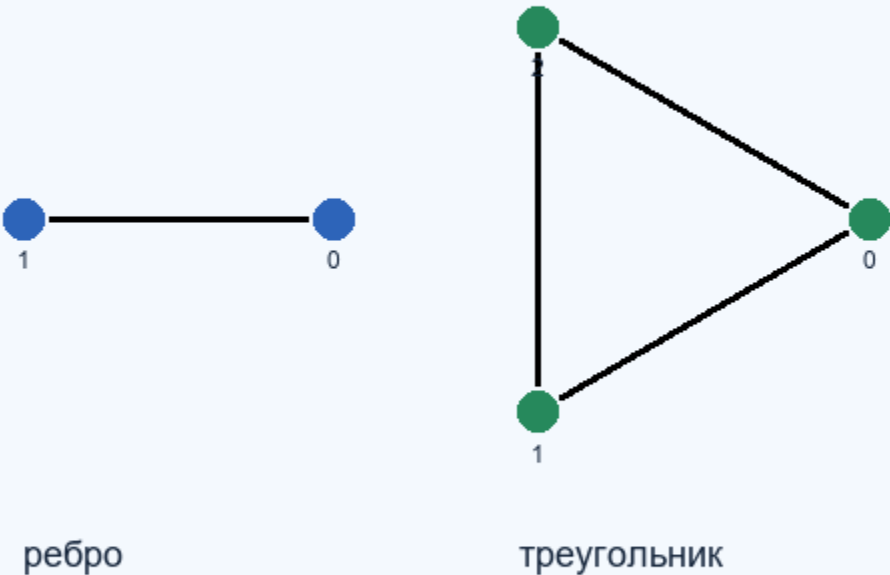
Таблица Кэли для $K_2 \times_f K_2$: результат диаметра 2

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 2}	{1}
2	{2}	{1}	{0, 2}

Ребро на треугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, результат = 2

Гомоморфное произведение ребра и треугольника



$$K_2 \times_f K_3$$

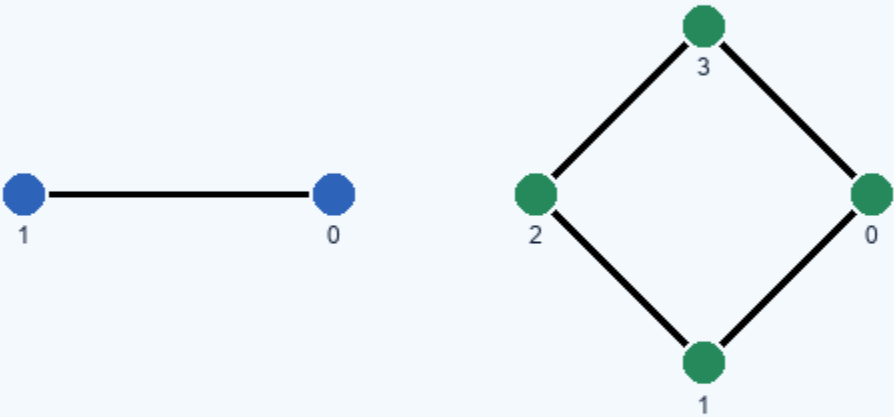
Таблица Кэли для $K_2 \times_f K_3$: результат диаметра 2

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

Ребро на четырехугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $C_4 = 2$, результат = 3

Гомоморфное произведение ребра и четырехугольника



ребро

четырехугольник

$$K_2 \times_f C_4$$

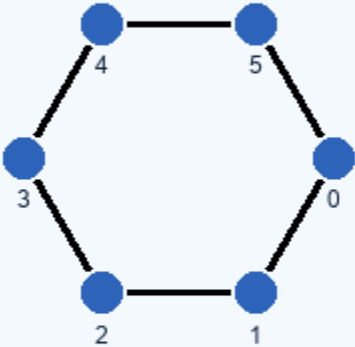
Таблица Кэли для $K_2 \times_f C_4$: результат диаметра 3

·	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2}	{1, 3}
3	{3}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}

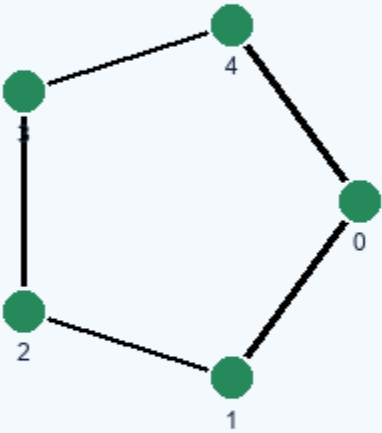
Цикл длины 6 на цикл длины 5

Диаметры: $C_6 = 3$, $C_5 = 2$, результат = 5

Гомоморфное произведение цикла длины 6 и цикла длины 5



цикл длины 6



цикл длины 5

$$C_6 \times_f C_5$$

Таблица Кэли алгебры $\mathfrak{H}_p$

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{1,3,5,...,n-1}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{0,2,4,...,n}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	...	{1,3,5,...,n-1}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	...	{0,2,4,...,n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	...	{0,2,4,...,n}

Таблица Кэли алгебры $\mathfrak{H}_p$

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{0,2,4,...,n}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{1,3,5,...,n-1}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	...	{1,3,5,...,n-1}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}

Гомоморфное произведение

$$G \times_f H$$

Алгебра: $\mathfrak{H}p_e$ или $\mathfrak{H}p_o$

Теорема. Если T - теория гомоморфного произведения ребра на граф, а $\mathfrak{B}$ - алгебра бинарных изолирующих формул T , то алгебра $\mathfrak{B}$ определяется одним из двух вариантов: $\mathfrak{H}p_e$ или $\mathfrak{H}p_o$.

Пояснение. Как и в тензорном случае, классификация разделяется на четную и нечетную серии.

Произведение Кронекера

$$G \otimes H$$

Определение. Произведение Кронекера $G_1 \otimes G_2$ определяется как граф с множеством вершин $V_1 \times V_2$; ребро между (u_1, v_1) и (u_2, v_2) проводится тогда и только тогда, когда $(u_1, u_2) \in E_1$ и $(v_1, v_2) \in E_2$.

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат несвязен, $\max \text{diam}$ компоненты = 1

Произведение Кронекера ребра и ребра



ребро

ребро

$$K_2 \otimes K_2$$

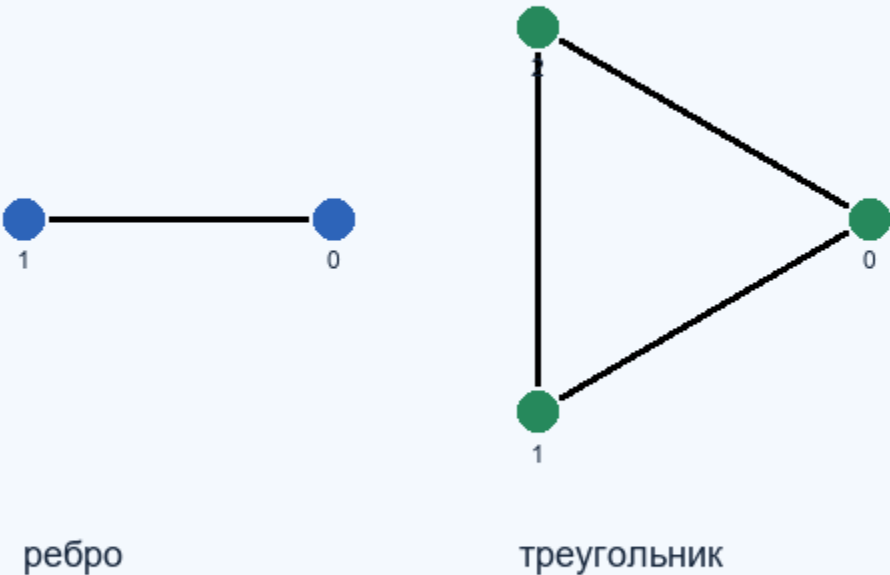
Таблица Кэли для $K_2 \otimes K_2$: результат диаметра 1

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0}

Ребро на треугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, результат = 3

Произведение Кронекера ребра и треугольника



$$K_2 \otimes K_3$$

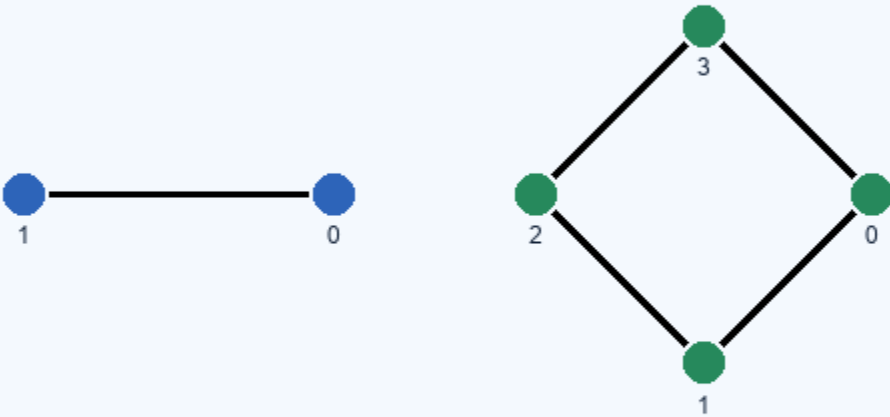
Таблица Кэли для $K_2 \otimes K_3$: результат диаметра 3

·	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2}	{1, 3}
3	{3}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}

Ребро на четырехугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $C_4 = 2$, результат несвязен, $\max \text{diam}$ компоненты = 2

Произведение Кронекера ребра и четырехугольника



ребро

четырехугольник

$$K_2 \otimes C_4$$

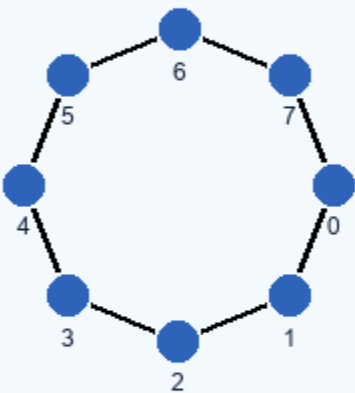
Таблица Кэли для $K_2 \otimes C_4$: результат диаметра 2

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 2}	{1}
2	{2}	{1}	{0, 2}

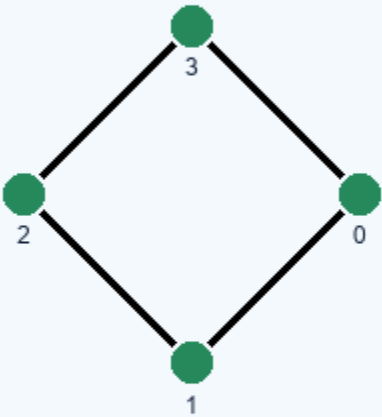
Цикл длины 8 на четырехугольник

Диаметры: $C_8 = 4$, $C_4 = 2$, результат несвязен, $\max \text{diam}$ компоненты = 4

Произведение Кронекера цикла длины 8 и четырехугольника



цикл длины 8



четырёхугольник

$$C_8 \otimes C_4$$

Таблица Кэли алгебры Kr_e

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{1,3,5, ...,n-1}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{0,2,4, ...,n}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ...,n-1}	...	{1,3,5, ...,n-1}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	...	{0,2,4, ...,n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	...	{0,2,4, ...,n}

Таблица Кэли алгебры Kr_0

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{0,2,4,...,n}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{1,3,5,...,n-1}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	...	{1,3,5,...,n-1}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}

Произведение Кронекера

$$G \otimes H$$

Алгебра: $\mathcal{K}r_o$ или $\mathcal{K}r_e$

Теорема. Если T - теория для произведений Кронекера для графов, $\mathfrak{M}$ - алгебра бинарных изолирующих формул теории T , то алгебра $\mathfrak{M}$ изоморфна алгебре $\mathcal{K}r_o$ или $\mathcal{K}r_e$.

Пояснение. Две алгебры соответствуют нечетной и четной сериям таблиц Кэли.

Модулярное произведение

$$G \nabla H$$

Определение. Модулярным произведением $G \nabla H$ называется граф с множеством вершин $V(G) \times V(H)$, в котором две различные вершины (u, v) и (x, y) смежны тогда и только тогда, когда $u \neq x$, $v \neq y$ и $(u \sim_G x) \iff (v \sim_H y)$.

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат несвязен, $\max \text{diam компоненты} = 1$

Модулярное произведение ребра и ребра



ребро

ребро

$$K_2 \nabla K_2$$

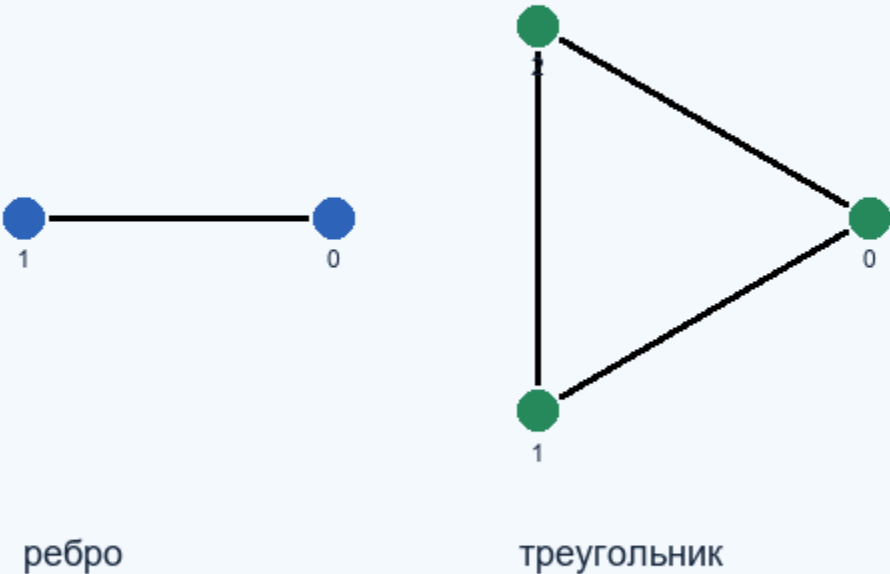
Таблица Кэли для $K_2 \nabla K_2$: результат диаметра 1

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0}

Ребро на треугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, результат = 3

Модулярное произведение ребра и треугольника



$$K_2 \nabla K_3$$

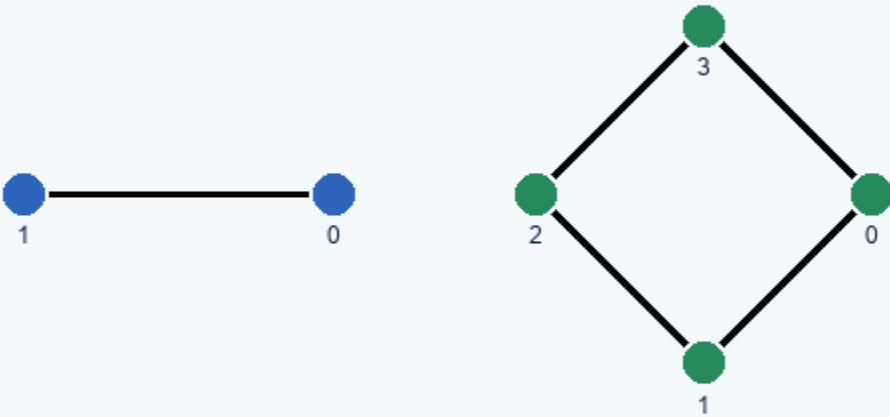
Таблица Кэли для $K_2 \nabla K_3$: результат диаметра 3

·	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2}	{1, 3}
3	{3}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}

Ребро на четырехугольник

Диаметры: $K_2 = 1, C_4 = 2$, результат несвязен, $\max \text{diam компоненты} = 2$

Модулярное произведение ребра и четырехугольника



$$K_2 \nabla C_4$$

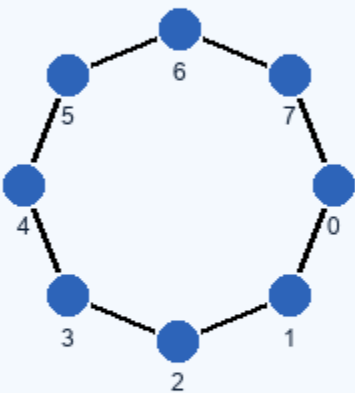
Таблица Кэли для $K_2 \nabla C_4$: результат диаметра 2

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 2}	{1}
2	{2}	{1}	{0, 2}

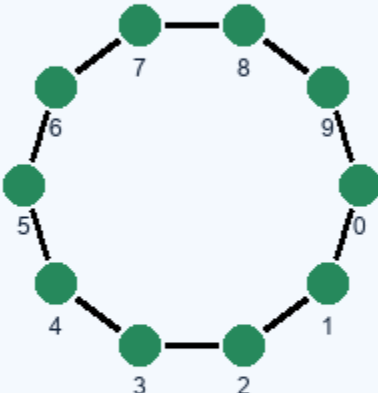
Цикл длины 8 на цикл длины 10

Диаметры: $C_8 = 4$, $C_{10} = 5$, результат = 2

Модулярное произведение цикла длины 8 и цикла длины 10



цикл длины 8



цикл длины 10

$$C_8 \nabla C_{10}$$

Таблица Кэли алгебры $\mathfrak{M}_e$

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{1,3,5, ...,n-1}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{0,2,4, ...,n}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ...,n-1}	...	{1,3,5, ...,n-1}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	...	{0,2,4, ...,n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	...	{0,2,4, ...,n}

Таблица Кэли алгебры $\mathfrak{M}_o$

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{0,2,4,...,n}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{1,3,5,...,n-1}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	...	{1,3,5,...,n-1}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}

Модулярное произведение

$$G \nabla H$$

Алгебра: $\mathfrak{M}_0$ или $\mathfrak{M}_e$

Теорема. Если T - теория модулярного произведения графов, $\mathfrak{M}$ - алгебра бинарных изолирующих формул теории T , то алгебра $\mathfrak{M}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{M}_0$ или $\mathfrak{M}_e$.

Пояснение. Модулярное произведение дает две серии алгебр, различающиеся четностью параметра.

Модулярное произведение и автоморфизмы циклов

$$D_m \times D_n, \quad C_m \nabla C_n$$

Определение. Для модулярного произведения циклов $C_m \nabla C_n$ используется то же определение $G \nabla H$; далее рассматривается действие $D_m \times D_n$ на вершинах и орбиты на парах вершин, параметризуемые циклическими расстояниями.

Ребро на ребро

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_2 = 1$, результат несвязен, $\max \text{diam компоненты} = 1$

Модулярное произведение с автоморфизмами ребра и ребра



ребро

ребро

$$K_2 \nabla K_2$$

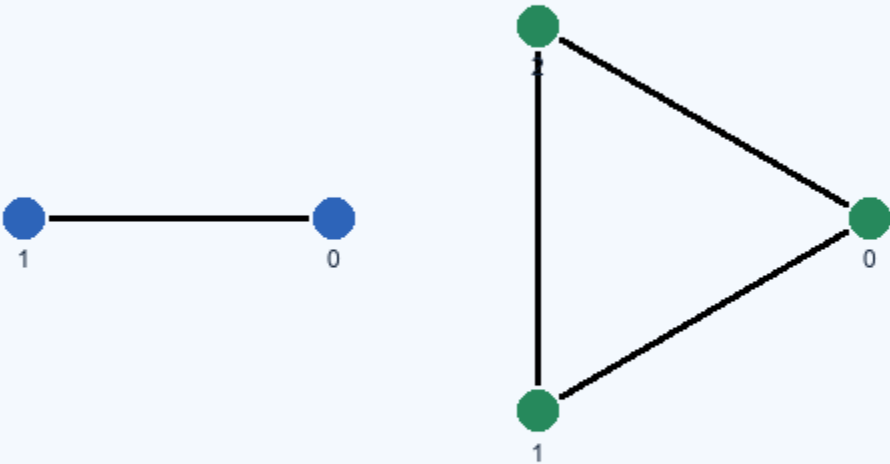
Таблица Кэли для $K_2 \nabla K_2$: результат диаметра 1

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0}

Ребро на треугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, результат = 3

Модулярное произведение с автоморфизмами ребра и треугольника



ребро

треугольник

$$K_2 \nabla K_3$$

Таблица Кэли для $K_2 \nabla K_3$: результат диаметра 3

·	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}
2	{2}	{1, 3}	{0, 2}	{1, 3}
3	{3}	{0, 2}	{1, 3}	{0, 2}

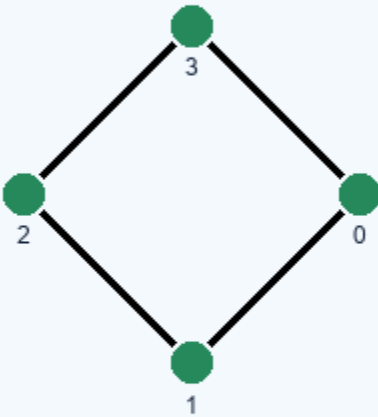
Ребро на четырехугольник

Диаметры: $K_2 = 1$, $C_4 = 2$, результат несвязен, max diam компоненты = 2

Модулярное произведение с автоморфизмами ребра и четырехугольника



ребро



четырёхугольник

$$K_2 \nabla C_4$$

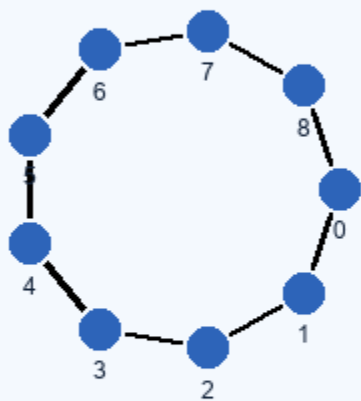
Таблица Кэли для $K_2 \nabla C_4$: результат диаметра 2

·	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 2}	{1}
2	{2}	{1}	{0, 2}

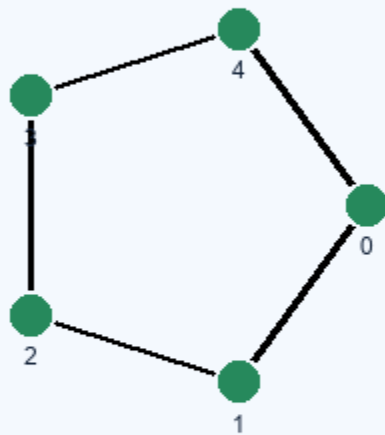
Цикл длины 9 на цикл длины 5

Диаметры: $C_9 = 4$, $C_5 = 2$, результат = 2

Модулярное произведение с автоморфизмами цикла длины 9 и цикла длины 5



цикл длины 9



цикл длины 5

$$C_9 \nabla C_5$$

Таблица Кэли алгебры $\mathfrak{M}_e$

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{1,3,5, ...,n-1}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{0,2,4, ...,n}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ...,n-1}	...	{1,3,5, ...,n-1}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	...	{0,2,4, ...,n}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	{1,3,5, ...,n-1}	{0,2,4, ...,n}	...	{0,2,4, ...,n}

Таблица Кэли алгебры $\mathfrak{M}_o$

*	0	1	2	3	4	...	n
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	...	{n}
1	{1}	{0,2}	{1,3}	{0,2}	{1,3,5}	...	{0,2,4,...,n}
2	{2}	{1,3}	{0,2,4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	...	{1,3,5,...,n-1}
3	{3}	{0,2}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}
4	{4}	{1,3,5}	{0,2,4,6}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	...	{1,3,5,...,n-1}
...	...	...	...	...	...	...	...
n	{n}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	{0,2,4,...,n}	{1,3,5,...,n-1}	...	{0,2,4,...,n}

Модулярное произведение и автоморфизмы циклов

$$D_m \times D_n, \quad C_m \nabla C_n$$

Алгебра: орбитные метки $O_{a,b}$; для алгебр модулярного произведения — $\mathfrak{M}_o, \mathfrak{M}_e$

Теорема. Орбиты действия группы $D_m \times D_n$ на упорядоченных парах вершин графа $C_m \nabla C_n$ в точности совпадают с множествами $O_{a,b}$, где $0 \leq a \leq \lfloor m/2 \rfloor, 0 \leq b \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

Пояснение. Эта теорема связывает модулярное произведение циклов с метками бинарных формул через орбиты пар вершин.

Ко-нормальное / дизъюнктивное произведение

$$G \vee H$$

Определение. Ко-нормальным, или дизъюнктивным, произведением графов G и H называется граф $G \vee H$ с множеством вершин $V(G) \times V(H)$; различные вершины (g, h) и (g', h') смежны тогда и только тогда, когда $gg' \in E(G)$ или $hh' \in E(H)$.

Цикл длины 2 на цикл длины 2

Диаметры: $C_2 = 1$, $C_2 = 1$, результат = 1

Ко-нормальное произведение цикла длины 2 и цикла длины 2



цикл длины 2



цикл длины 2

$$C_2 \vee C_2$$

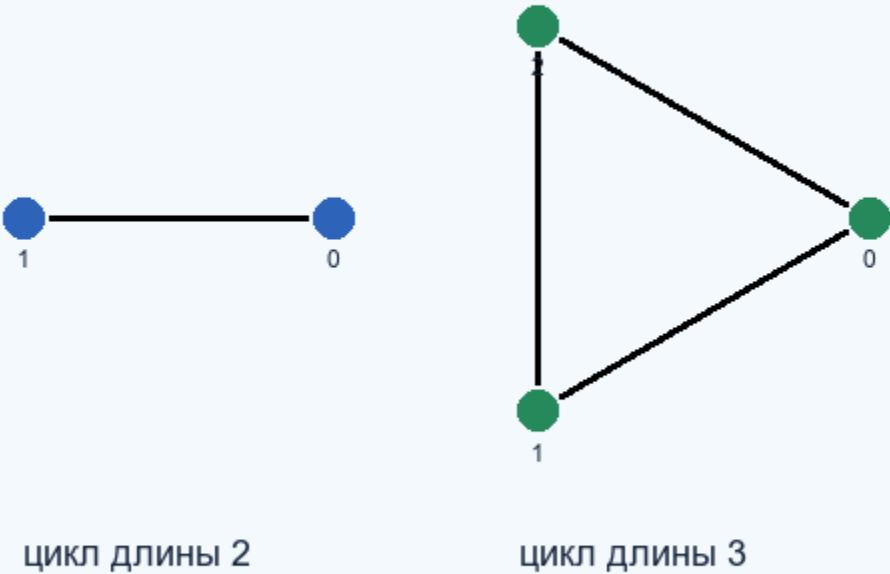
Таблица T_1 для ко-нормального произведения $C_2 \vee C_2$

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0, 1}

Цикл длины 2 на треугольник

Диаметры: $C_2 = 1$, $C_3 = 1$, результат = 1

Ко-нормальное произведение цикла длины 2 и цикла длины 3



$$C_2 \vee C_3$$

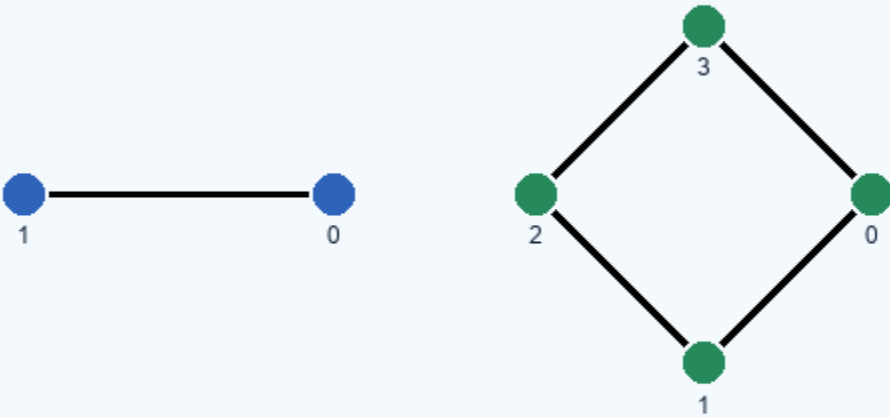
Таблица T_1 для ко-нормального произведения $C_2 \vee C_3$

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0, 1}

Цикл длины 2 на четырехугольник

Диаметры: $C_2 = 1$, $C_4 = 2$, результат = 2

Ко-нормальное произведение цикла длины 2 и четырехугольника



цикл длины 2

четырёхугольник

$$C_2 \vee C_4$$

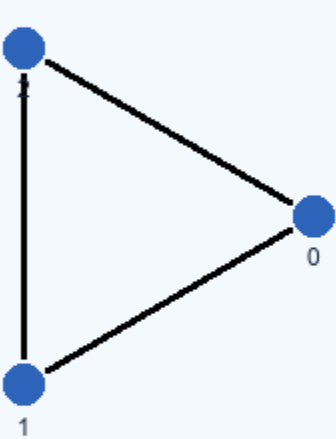
Таблица T_2 для ко-нормального произведения $C_2 \vee C_4$

$\cdot$	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

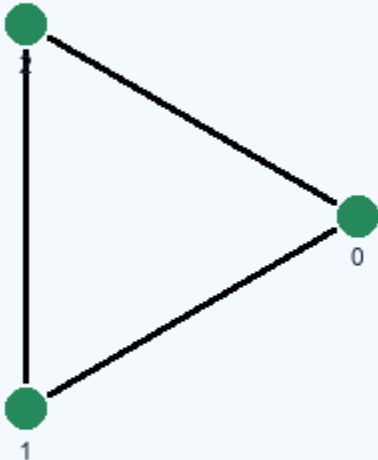
Треугольник на треугольник

Диаметры: $K_3 = 1$, $K_3 = 1$, результат = 1

Ко-нормальное произведение треугольника и треугольника



треугольник



треугольник

$$K_3 \vee K_3$$

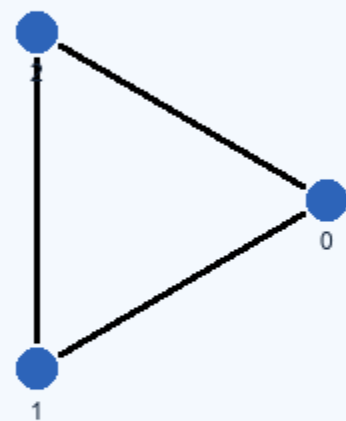
Таблица T_1 для ко-нормального произведения $K_3 \vee K_3$

$\cdot$	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0, 1}

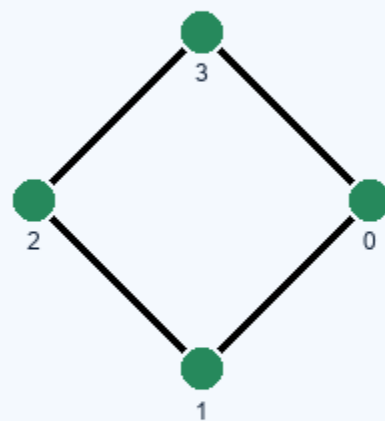
Треугольник на четырехугольник

Диаметры: $C_3 = 1$, $C_4 = 2$, результат = 2

Ко-нормальное произведение цикла длины 3 и четырехугольника



цикл длины 3



четырехугольник

$$C_3 \vee C_4$$

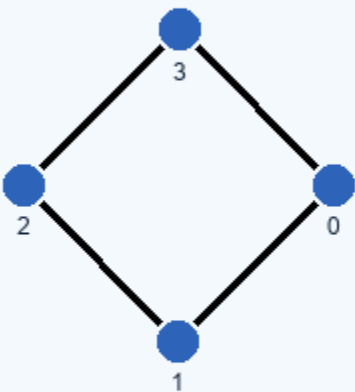
Таблица T_2 для ко-нормального произведения $C_3 \vee C_4$

$\cdot$	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

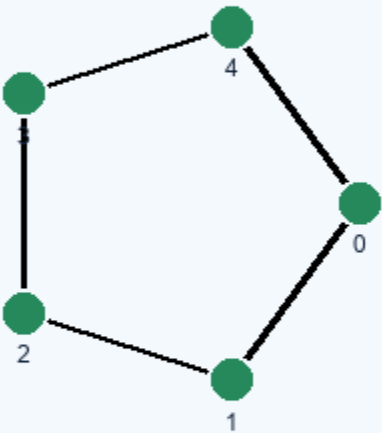
Четырехугольник на цикл длины 5

Диаметры: $C_4 = 2$, $C_5 = 2$, результат = 2

Ко-нормальное произведение четырехугольника и цикла длины 5



четырёхугольник



цикл длины 5

$$C_4 \vee C_5$$

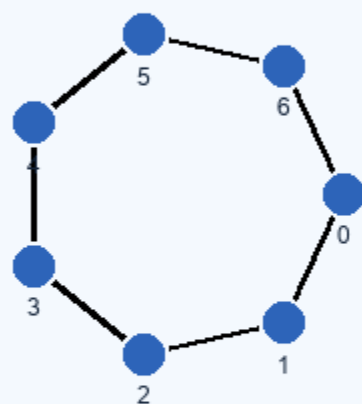
Таблица T_2 для ко-нормального произведения $C_4 \vee C_5$

$\cdot$	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

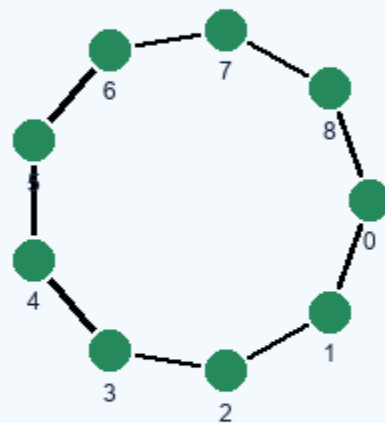
Цикл длины 7 на цикл длины 9

Диаметры: $C_7 = 3$, $C_9 = 4$, результат = 2

Ко-нормальное произведение цикла длины 7 и цикла длины 9



цикл длины 7



цикл длины 9

$$C_7 \vee C_9$$

Таблица T_2 для ко-нормального произведения $C_7 \vee C_9$

$\cdot$	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

Ко-нормальное / дизъюнктивное произведение

Лемма о диаметре. Если G и H не имеют изолированных вершин, то диаметр $G \vee H$ не превосходит 2.

Следствие. В этом случае алгебра $\mathfrak{B}(G \vee H)$ имеет не более трех основных меток: $\rho_{\nu(p)} \subseteq \{0, 1, 2\}$.

Смысл для бинарных формул. Композиционная таблица сразу сжимается к меткам расстояний 0, 1, 2; дальние расстояния в ко-нормальном произведении без изолированных вершин не появляются.

Источник: article.tex, лемма о диаметре и следствие из раздела «Предварительные сведения».

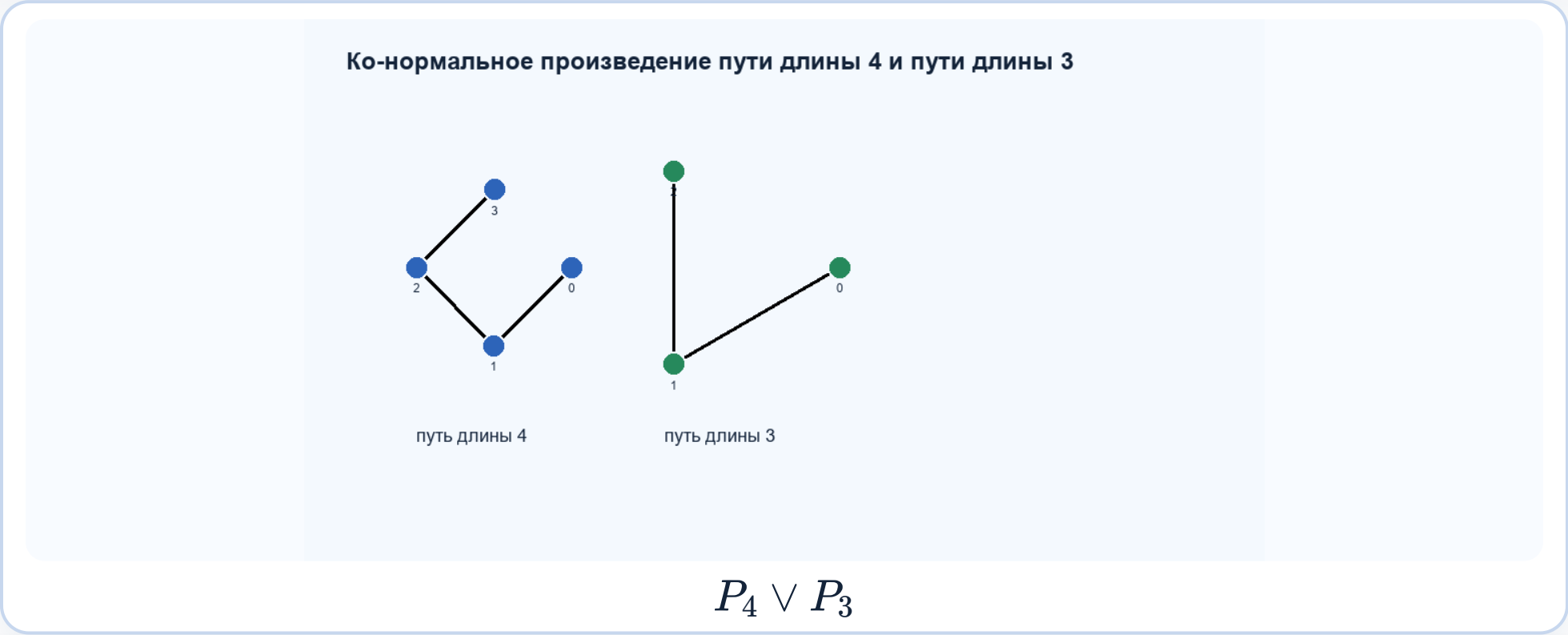
Одна таблица для разных графов

Произведение	Условие	Диаметр	Алгебра
$K_m \vee K_n$	$m, n \geq 2$	1	$\mathfrak{T}_1$
$C_m \vee C_n$	$(m, n) \neq (3, 3)$	2	$\mathfrak{T}_2$
$P_m \vee P_n$	$m, n \geq 3$	2	$\mathfrak{T}_2$
$K_{1,m} \vee K_{1,n}$	$m, n \geq 2$	2	$\mathfrak{T}_2$
$K_m \vee C_n$	$m \geq 2, n \geq 4$	2	$\mathfrak{T}_2$
$K_{r,s} \vee C_n$	$r, s \geq 1, n \geq 3$	2	$\mathfrak{T}_2$

Обозначения. K_n - полный граф, C_n - цикл, P_n - путь, $K_{1,n}$ - звезда, $K_{r,s}$ - полный двудольный граф. Во всех неполных строках без изолированных вершин ко-нормальное произведение имеет диаметр 2 и содержит треугольник.

$P_m \vee P_n$: неполный случай без изолированных вершин

Пример. Для $m, n \geq 3$ пути P_m и P_n имеют ребра, не имеют изолированных вершин и не являются полными графами.

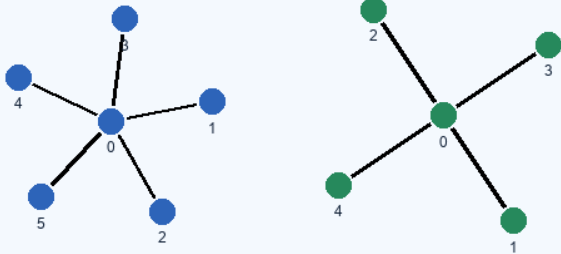


Вывод. Поэтому $\mathfrak{B}(P_m \vee P_n) \cong \mathfrak{I}_2$.

$K_{1,m} \vee K_{1,n}$: центр дает ребра, листья дают неполноту

Пример. В звезде центр смежен со всеми листьями, но листья попарно не смежны. При $m, n \geq 2$ оба сомножителя неполны и без изолированных вершин.

Ко-нормальное произведение звезды $K_{1,5}$ и звезды $K_{1,4}$



звезда $K_{1,5}$

звезда $K_{1,4}$

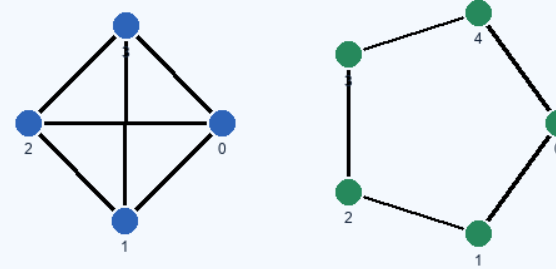
$K_{1,5} \vee K_{1,4}$

Вывод. В произведении возникает K_3 , диаметр равен 2, значит $\mathfrak{B}(K_{1,m} \vee K_{1,n}) \cong \mathfrak{T}_2$.

$K_m \vee C_n$: полный сомножитель не всегда делает произведение полным

Разделение. Если $n = 3$, то $C_3 = K_3$, оба сомножителя полны и получается $\mathfrak{T}_1$. Если $n \geq 4$, то C_n не является полным графом: в нем есть несмежные вершины.

Ко-нормальное произведение полного графа K_4 и цикла длины 5



полный граф K_4

цикл длины 5

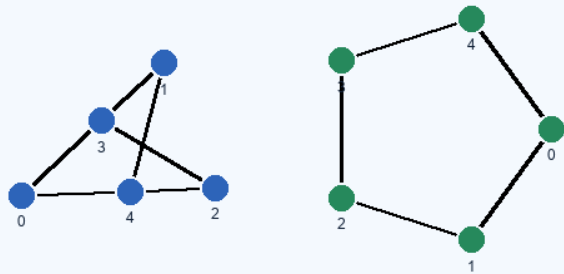
$$K_4 \vee C_5$$

Вывод. Для $m \geq 2$, $n \geq 4$: $\mathfrak{B}(K_m \vee C_n) \cong \mathfrak{T}_2$.

$K_{r,s} \vee C_n$: еще один источник $\mathfrak{T}_2$

Пример. У $K_{r,s}$ есть ребра, а при типичных параметрах он не полон; у $C_n, n \geq 3$, нет изолированных вершин.

Ко-нормальное произведение полного двудольного графа $K_{3,2}$ и цикла длины 5



полный двудольный граф $K_{3,2}$ и цикл длины 5

$$K_{3,2} \vee C_5$$

Вывод. Дизъюнктивная смежность снова дает диаметр 2, треугольник и алгебру $\mathfrak{T}_2$.

Ко-нормальное / дизъюнктивное произведение

Предложение. Для любых простых графов G и H произведение $G \vee H$ является полным графом тогда и только тогда, когда оба графа G и H являются полными.

Разделение случаев. Полный случай дает диаметр 1 и алгебру $\mathfrak{T}_1$. Если хотя бы один сомножитель неполон, то при отсутствии изолированных вершин неполное произведение имеет диаметр 2.

Источник: article.tex, предложение о полноте ко-нормального произведения.

Почему появляется $\mathfrak{S}_2$

Лемма о треугольнике. Если графы G и H содержат хотя бы по одному ребру, то $G \vee H$ содержит треугольник K_3 .

Следствие для циклов. Для любых $m, n \geq 3$ произведение правильных многоугольников $C_m \vee C_n$ содержит треугольник.

Модельно-теоретический ход. Наличие симплекса вместе с диаметром 2 переводит алгебру бинарных формул в алгебру симплексов $\mathfrak{S}_2$.

Классификация без изолированных вершин

Теорема. Пусть G и H - конечные простые графы без изолированных вершин, и пусть каждый из них содержит хотя бы одно ребро. Если G и H полны, то $\mathfrak{B}(G \vee H) \cong \mathfrak{T}_1$; если хотя бы один из них неполон, то $\mathfrak{B}(G \vee H) \cong \mathfrak{T}_2$.

Примеры из статьи. $K_m \vee K_n$ дает $\mathfrak{T}_1$, а $C_m \vee C_n$, $P_m \vee P_n$, $K_{1,m} \vee K_{1,n}$, $K_m \vee C_n$ при неполном втором сомножителе дают $\mathfrak{T}_2$.

Источник: article.tex, подраздел «Основной результат» и таблица примеров.

Изолированные вершины требуют отдельной классификации

Ограничение. Если один из сомножителей имеет изолированную вершину, доказательство диаметра 2 уже не работает: появляются слои, где смежность определяется только другой координатой.

Пример. Для пустого графа E_m в произведении $E_m \vee H$ смежность задается только второй координатой; если H несвязен, произведение тоже может быть несвязным.

Вывод. В этой зоне важны компоненты связности и расположение изолированных вершин, поэтому основной классификационный результат статьи формулируется без изолированных вершин.

Таблицы $\mathfrak{I}_1$ и $\mathfrak{I}_2$ для ко-нормального произведения

$\mathfrak{I}_1$

.	0	1
0	{0}	{1}
1	{1}	{0, 1}

$\mathfrak{I}_2$

.	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{0, 1, 2}

Алгебры бинарных формул как инварианты

Мы рассматриваем алгебры бинарных изолирующих формул как производные модельно-теоретические инварианты полной теории. Они кодируют бинарные формульные связи между реализациями типов; в графовых теориях эти связи получают геометрическую интерпретацию через расстояния, орбиты автоморфизмов, симплексы, диаметр и тип произведения.

Смысл инварианта. Алгебра бинарных формул находится между синтаксисом и геометрией: она возникает из композиций главных формул, но ведет себя как конечная реляционная мультиалгебра, отражающая структуру бинарных связей.

Устойчивые семейства и дефинируемая геометрия

Устойчивые семейства

Мы видим не хаотический набор алгебр, а устойчивые серии: декартовы произведения сохраняют дистанционную структуру, тензорные, кронекеровы и модулярные произведения дают четно-нечетные пары, а сильные, лексикографические, корневые и ко-нормальные произведения часто переходят к симплексным алгебрам.

Дефинируемая геометрия

Свойства графа переходят в свойства алгебры не буквально, а через дефинируемую бинарную геометрию: диаметр ограничивает число меток, автоморфизмы задают орбитальные классы, а полный подграф и малый диаметр запускают симплексное поглощение.

Классификация через алгебры меток

Мы получаем аппарат для описания свойств алгебраических систем, графов и операций над ними через конечные алгебры меток. Для широких классов графовых произведений эти алгебры определяются комбинаторными параметрами: диаметром, расстояниями, орбитами автоморфизмов, наличием симплексов и правилом произведения.

Главный вывод. Алгебра бинарных формул является сильным, но не полным инвариантом: существенно различные графы и произведения могут иметь одну и ту же алгебру. Поэтому мы не восстанавливаем исходную структуру только по этой алгебре, а классифицируем ее дефинируемую бинарную геометрию.

Смысл программы. Алгебры бинарных формул находятся между синтаксисом и геометрией: они возникают из композиций главных формул, но ведут себя как конечные реляционные мультиалгебры, отражающие расстояния, симметрии и локальную связность графов.